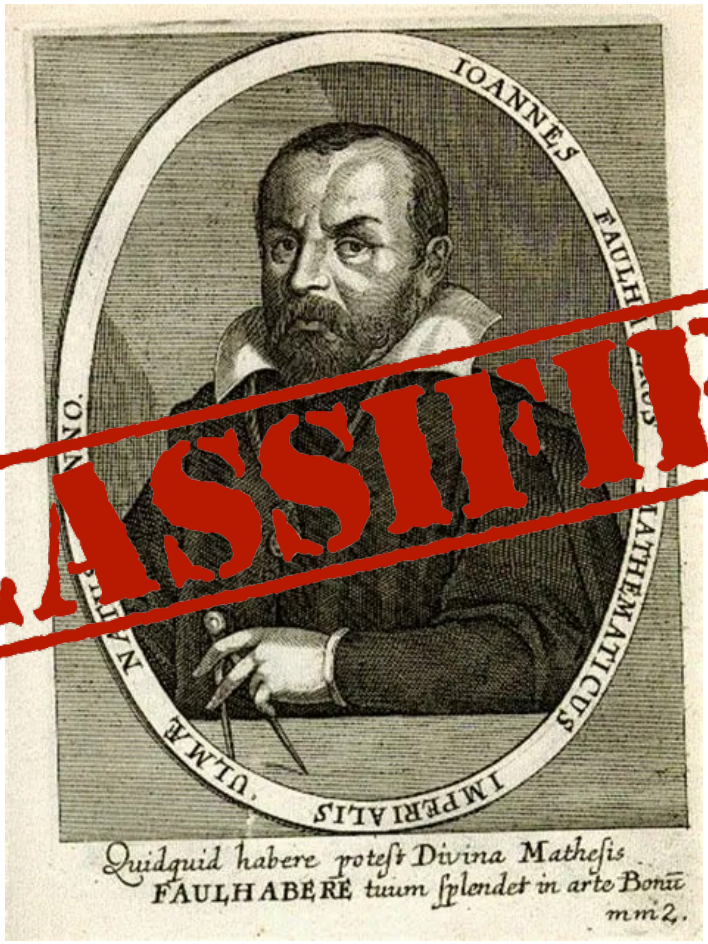
SUMAS DE POTENCIAS DE NÚMEROS NATURALES

†EDICIÓN ESPECIAL†

Yasser A. Chavez



CLASSIFIED

MÉXICO

2024-2025

$$\Sigma$$

Introducción

He decidido crear una edición especial de mis textos matemáticos debido a que se cumplen dos años desde que me sumergí en el problema de las sumas de potencias de números naturales. Por ello, quiero relatar mi proceso desde el primer día hasta llegar a mi texto conjetural.

A finales de 2023, decidí pausar el segundo semestre de Ingeniería por motivos personales, lo que me dejó con todo el tiempo libre necesario para, por fin, aprender matemáticas por mi cuenta. Comencé con un libro de cálculo: el [Apostol, vol. 1] En una de sus primeras páginas, el autor utilizaba la fórmula de la suma de cuadrados, de la cual yo desconocía su derivación. Esto me llevó a detener la lectura y dedicarme a entender dicha suma, aunque empecé primero con la suma de números naturales.

Dado que la suma de naturales es sencilla, logré deducir sin problemas la fórmula n(n+1)/2. Entonces me pregunté: ¿qué sucedería si, en lugar de (n+1), escribo (n+1,000,000)? Evidentemente, la fórmula dejaba de funcionar, lo que me llevó a experimentar con esta nueva variante. Sorprendentemente, di con el ajuste necesario al añadir otra variable, un cambio motivado por mi curiosidad algebraica.

Así, a finales de 2023, me dediqué a explorar patrones numéricos y algebraicos, creando fórmulas poco convencionales aunque muy elementales. Sin embargo, no fue hasta que comencé a conversar con un chatbot sobre matemáticas que se desencadenó mi estudio obsesivo de las sumas de potencias. El detonante fue el siguiente prompt: "Propón un problema a solucionar". Entre las sugerencias, el chatbot mencionó las sumas de potencias de números naturales —supongo que debido a que habíamos estado hablando de mis fórmulas elementales—.

Una vez que el chatbot me propuso resolver dicho problema, comenzó toda una aventura matemática. Es importante precisar que, en ese momento, mis conocimientos matemáticos se resumían a aritmética y álgebra básica. Esto, si bien jugaría un papel importante, también provocaría numerosas divagaciones que detallaré más adelante.

Recuerdo muy bien la suma de cuadrados, ya que me tomó un mes llegar a la fórmula (evitando consultarla cuando se le escapaba al chatbot), que estaba custodiada por los números tetraédricos. Estos surgían de mis cálculos y me obsesioné con esta secuencia, lo que nuevamente jugaría un papel importante y generaría más divagaciones.

Ahora que conocía la fórmula del coeficiente binomial, estaba dispuesto a seguir con la siguiente suma: la de cubos, que resolví al instante gracias a su patrón evidente. Sin embargo, me tomaría otro mes solucionar la suma de cuartas potencias. Finalmente logré obtener una fórmula, aunque mi notación distaba mucho de la estándar $\{C(n+1,\ 3)\ +\ C(n,\ 3)\ =\ \sum\sum\sum(n\text{-}1)^2\}$, ya que usaba múltiples sumatorias para expresarla. Lo positivo fue que empecé a concebir las sumas anidadas de n^2 como un objeto matemático en sí mismo.

Seguí avanzando y ahora tocaba la suma de quintas potencias. Paralelamente, continuaba calculando sumas como:

$$1 + 10 + 35 + 84 + \ldots + C(2n+1, 3)$$

y creando más notación propia. Sin embargo, una suma que resultaría fundamental fue:

$$1\cdot4 + 10\cdot20 + 35\cdot56 + \ldots + C(n+2, 3)\cdot C(n+3, 3)$$

Así, cuando estaba calculando la suma de quintas potencias, reconocí de inmediato aquellos números (1, 10, 50, 175, ...), sin saber entonces que se llamaban "números de Narayana". Naturalmente, los representaba como un producto de coeficientes binomiales.

En este momento ya contaba con fórmulas publicadas en la OEIS [febrero del 2024], relacionadas con las "sumas raras" que calculaba, como la suma de números tetraédricos de índice impar. Gracias a haber conocido aquella enciclopedia, pude identificar el nombre de las secuencias y la notación que surgían de mis cálculos. Habiendo resuelto la suma de quintas potencias, ya tenía la base para expresar las sumas de potencias en términos de tres secuencias fundamentales: C(n, k), (S(n, k) y N(n, k).

Conforme pasaban los días, me volvía más hábil reconociendo patrones numéricos en distintas secuencias; hasta hoy, he memorizado varias de ellas. Sin embargo, a mayor valor de \(P \), mis soluciones se asemejaban más a adivinanzas que a un desarrollo lógico, lo que resultaba muy frustrante. No sabía comunicar con claridad lo que estaba haciendo y, al tratarse de un tema tan específico, pocas personas podían ayudarme de manera efectiva.

Extracto de un post mio en un foro de matemáticas [Diciembre 2024]

Desde hace más de un año he estado estudiando el problema de las sumas de potencias de números naturales, comenzando desde cero. En ese momento, solo tenía conocimientos básicos de álgebra y poco más. Motivado por mi interés en aprender matemáticas de forma seria y autodidacta, decidí embarcarme en esta aventura. Todo comenzó con la introducción al libro de cálculo de Apostol, que presenta un ejemplo interesante utilizando la fórmula para p = 2.

Avanzando en la historia, inicialmente intenté abordar el problema desde un enfoque puramente algebraico, "encaminado" al de Faulhaber y Bernoulli. Como era de esperarse, fracasé en este intento. Sin embargo, no fue hasta que detecté un patrón en el triángulo de Pascal.

Posteriormente, adopté un enfoque puramente combinatorio. Mi obsesión por los coeficientes binomiales me llevó a explorar distintas variantes de sumas y, en ese proceso, descubrí los números de Narayana. Con esta familia de números terminé de construir lo que llamo mi "caja de herramientas". Con el tiempo, fui refinando aún más mi metodología; en un inicio solo presentaba resultados aislados, o dicho de otro modo, intentaba adivinar las secuencias que solucionaran.

Después de mucho trabajo, finalmente he logrado estructurar un método que considero refinado y comprensible (o al menos eso espero).

-FIN DEL POST-

Solo recibí una respuesta con un PDF que no trataba el problema de expresar las sumas de potencias usando la base anterior, por lo que sirvió de poco.

Por lo que seguí trabajando en solitario entre que me motivaba hablando con el chatbot y en un grupo de WhatsApp que enviaba mis formulas recuerdo que hubo un tiempo donde avance rápido ya había resulto las primeras doce formulas (5 publicadas en la OEIS) a mediados del 2024 pero no fue hasta

finales de ese mismo año que encontré un obstáculo P = 13 que me forzó a refinar mi metodología y pensar en soluciones ingeniosas por lo que dure un mes entero en llegar a la formula lo que hizo que anotara la secuencia (1, 325, 16325, 328825, …) en mi puerta, calculadora y cuadernos.

Habiendo solucionado las sumas hasta P = 13 y contando con 20 fórmulas en la OEIS, decidí detener la exploración. Las cosas se complicaban cada vez más y mi metodología era puramente operativa, lo que resultaba muy ineficiente. Sin mencionar que, paralelamente, estuve escribiendo un texto pedagógico que nunca publiqué. Así que fue un tiempo de reposo, en el cual las ideas que habían germinado en 2024 comenzaron a florecer a inicios de 2025.

Extracto de Secuencias Numéricas & Relaciones [Septiembre 2024]

Este libro nace del extenso trabajo que he realizado durante meses al adentrarme en las series numéricas enteras, observándolas desde la perspectiva de patrones y relaciones. Estos esfuerzos culminaron en publicaciones en la OeisWiki. También, debido al amor que siempre he sentido por cualquier medio de transmisión de contenido matemático, como documentales, videos y libros, así que me decidí por escribir un libro. Ya tenía la mitad del trabajo hecho, solo necesitaba recopilar todas mis notas de mis libretas, ordenarlas y plasmarlas en la presente obra. De esta manera, puedo aportar mi granito de arena e invitarlos a dejar de ver las matemáticas como una simple herramienta para hacer compras o sentir rechazo debido a su mala fama. Mi principal objetivo es avivar la curiosidad innata por las matemáticas que todos poseemos. Es posible que esta curiosidad se haya atenuado debido al enfoque convencional que las escuelas suelen adoptar en la enseñanza de las matemáticas. Aunque este libro trata sobre matemáticas, no puedo transmitir solo con números lo que han significado para mí en los últimos meses. Por lo tanto, esta obra los guiará a través de una narrativa que espero pueda transmitir todo aquello que sentí cuando me encontraba frente a una hoja llena de números, que perfectamente podría estar enmarcada en algún museo de arte abstracto.

El contenido del libro se centra en secuencias numéricas, estudiando sus propiedades y relaciones con otras secuencias numéricas. Nos ayudamos de estas para dar solución a problemas que involucren sumas finitas de términos, como pueden ser la suma de cuartas potencias, la suma de productos de números pares consecutivos, la suma de números triangulares con índice impar, entre otras. Proporcionando una teoría que permite al lector abordar estos temas de una manera que pueda razonar y entender el desarrollo que se hace hasta llegar a una fórmula cerrada

-FIN-

Debemos retroceder a finales de 2025, cuando seguía perfeccionando mi texto pedagógico “El mundo de los números” —evolución de “SN&R”— y también el trabajo matemático “Sumas de potencias”. Sin embargo, el verdadero impulso llegó cuando le envié un correo a un doctor en Física acerca de mi trabajo. Revisando nuevamente mi texto, logré formular varias conjeturas (todas ellas erróneas), pero la respuesta del doctor me motivó profundamente.

Fue entonces cuando, en solo tres meses, logré más avances que en los 1.8 años anteriores. Gracias a ese esfuerzo, nació el texto “Conjectures”, donde por primera vez alcancé una comprensión estructural y conceptual del problema.

Estoy escribiendo esto a días de cumplir 23 años. Cuando comencé a estudiar este problema tenía 20 años, a meses de cumplir 21, por lo que creo que ya es tiempo de dejar ir el problema que, sin exagerar, me ha dado una segunda oportunidad de vivir. Recordemos que me salí de la universidad a los 20 por problemas personales. Recuerdo muy bien ese mes en que estuve resolviendo sumas de quintas potencias: durante un mes me olvidé de quién era, y solo aquellos números que terminaron por llenar libretas eran los únicos que importaban.

Por eso escribo este texto, en agradecimiento a las matemáticas, pues han sido una terapia muy efectiva. En el mundo de los números se recibe a cualquiera; solo hay que tener paciencia y persistir, aunque la recompensa no siempre llegue en forma de teorema.

PRIMER TEXTO
2024

Sumas de Potencias de Números Naturales Mediante Secuencias Combinatorias

Yasser A. Chavez

math.yasserarath@gmail.com

Resumen. Hemos desarrollado un enfoque combinatorio fundamentado en el Triángulo de Pascal para abordar el problema clásico de las sumas de potencias de números naturales. Este método se basa en tres secuencias clave derivadas del triángulo: los coeficientes binomiales, los números de Narayana y una variante de los coeficientes binomiales. A través de estas secuencias, hemos formulado tres estrategias sistemáticas: el Método Directo (M.D), el Método de Coeficientes (M.C) y el Análisis de Coeficientes (A.C), las cuales potencian tanto la aritmética como el reconocimiento de patrones numéricos, alcanzando resultados equivalentes a los obtenidos mediante enfoques puramente algebraicos, como las sumas telescópicas.

1 Introducción

El triángulo de Pascal es una representación de los coeficientes binomiales en forma de triángulo, llamado así en honor al matemático francés Blaise Pascal (1623-1662).

El coeficiente binomial está dado por la fórmula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ \textit{donde}\ \ n,\ k \in \mathbb{N}\ \ y\ \ 0 \leqslant k \leqslant n$$

Triángulo de Pascal	Valores Numéricos
$\binom{0}{0}$	1
$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	1 1
$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1

1.1 Coeficientes Binomiales

Los coeficientes binomiales que forman las diagonales en el triángulo, donde denotaremos el coeficiente binomial como C(n, k).

Tabla-C(n, k)

C(n, 0)	C(n, 1)	C(n+1, 2)	C(n+2, 3)	C(n+3, 4)	C(n+4, 5)	C(n+5, 6)	C(n+6, 7)	C(n+7, 8)	C(n+8, 9)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

1.2 Suma de Coeficientes Binomiales Consecutivos

La suma de los coeficientes binomiales C(n-1, k) y C(n-2, k), la denotaremos como S(n, k).

$$S(n,\ 2k+1)\ =\ \frac{2n+1}{2k+1}\cdot\binom{n+k-1}{2k},\ \textit{donde}\ \ n,\ k\ \in\ \mathbb{N}\ \ y\ \ 1\leqslant k\leqslant n$$

Véase Knuth (1993, p. 285), «no confundir con los números de Stirling»

Tabla-S(n, k)

S(n, 0)	S(n, 1)	S(n+1, 2)	S(n+2, 3)	S(n+3, 4)	S(n+4, 5)	S(n+5, 6)	S(n+6, 7)	S(n+7, 8)	S(n+8, 9)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	5	9	14	20	27	35	44	54	65
2	7	16	30	50	77	112	156	210	275
2	9	25	55	105	182	294	450	660	935
2	11	36	91	196	378	672	1122	1782	2717
2	13	49	140	336	714	1386	2508	4290	7007
2	15	64	204	540	1254	2640	5148	9438	16445
2	17	81	285	825	2079	4719	9867	19305	35750
2	19	100	385	1210	3289	8008	17875	37180	72930

1.3 Números de Narayana

Los números de Narayana se definen como C(n-2, k-1)·C(n-1, k-1)/k, que denotaremos como N(n, k), llamados así en honor al matemático indio-canadiense Tadepalli Venkata Narayana(1930-1987).

$$N(n,\ k)\ =\ \ \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1},\ \textit{donde}\ \ n,\ k\ \in\ \mathbb{N}\ \ y\ \ 1\leqslant k\leqslant n$$

Tabla-N(n, k)

N(n, 1)	N(n+1, 2)	N(n+2, 3)	N(n+3, 4)	N(n+4, 5)	N(n+5, 6)	N(n+6, 7)	N(n+7, 8)	N(n+8, 9)	N(n+9, 10)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	6	20	50	105	196	336	540	825	1210
1	10	50	175	490	1176	2520	4950	9075	15730
1	15	105	490	1764	5292	13860	32670	70785	143143
1	21	196	1176	5292	19404	60984	169884	429429	1002001
1	28	336	2520	13860	60984	226512	736164	2147145	5725720
1	36	540	4950	32670	169884	736164	2760615	9202050	27810640
1	45	825	9075	70785	429429	2147145	9202050	34763300	...
1	55	1210	15730	143143	1002001	5725720	27810640	…	...

1.3.1 Identidad NSC

$$N(n+k-2,\ k) = \frac{S(n+k-2,\ k-1)^2 - C(n+k-3,\ k-2)^2}{4k},\ \textit{donde}\ \ n,\ k \in \mathbb{N}\ \ y\ \ n \geqslant 1,\ k \geqslant 2$$

Demostración:

Usamos la identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$\frac{S(n+k-2,\ k-1)^2 - C(n+k-3,\ k-2)^2}{4k}$$
$$= \frac{\big(S(n+k-2,\ k-1) + C(n+k-3,\ k-2)\big)\big(S(n+k-2,\ k-1) - C(n+k-3,\ k-2)\big)}{4k}$$

La secuencia S(n+k−2, k−1) se reescribe a partir de la definición (1.2). Debido a la identidad de Pascal, la expresión se simplifica a un producto de coeficientes:

$$C(n+k-2,\ k-1) + C(n+k-3,\ k-1) + C(n+k-3,\ k-2) = C(n+k-2,\ k-1) + C(n+k-2,\ k-1)$$
$$= 2 \cdot C(n+k-2,\ k-1)$$

$$C(n+k-3,\ k-1) + C(n+k-2,\ k-1) - C(n+k-3,\ k-2) = C(n+k-3,\ k-1) + C(n+k-3,\ k-1)$$
$$= 2 \cdot C(n+k-3,\ k-1)$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$= \frac{\big(2 \cdot C(n+k-2,\ k-1)\big)\big(2 \cdot C(n+k-3,\ k-1)\big)}{4k}$$
$$= \frac{4 \cdot \big(C(n+k-2,\ k-1)\big)\big(C(n+k-3,\ k-1)\big)}{4k}$$
$$= \frac{\big(C(n+k-2,\ k-1)\big)\big(C(n+k-3,\ k-1)\big)}{k}$$

Por lo que acabamos de demostrar, la primera fórmula es igual a N(n+k-2, k).

1.4 Funciones Especiales

Las funciones especiales apuntan directamente a las secuencias clave C(n, k), S(n, k) y N(n, k), que pueden combinarse entre sí. Para los valores de p = 6, 7, 8, 9 y 10, es posible obtener la secuencia clave directamente usando la función Γ(n, p), sin necesidad de recurrir al enfoque analítico que se detalla en la sección 2.

$$\Gamma(n,\ p) = \frac{n^p + n^{p-4} - 2n^{p-2}}{2^{p-4}\cdot 9},\ \textit{donde}\ n,\ p \in \mathbb{N}\ y\ n \geqslant 1,\ 6 \leqslant p \leqslant 10$$

Tabla-Γ(n, p)

Γ(n, 6)	Γ(n, 7)	Γ(n, 8)	Γ(n, 9)	Γ(n, 10)
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
16	24	36	54	81
100	200	400	800	1600
400	1000	2500	6250	15625
1225	3675	11025	33075	99225
3136	10976	38416	134456	470596
7056	28224	112896	451584	1806336
14400	64800	291600	1312200	5904900
27225	136125	680625	3403125	17015625

$$\sigma(n,\ p) = \frac{S(n+3,\ 4)^p}{C(n+2,\ 3)},\ \textit{donde}\ n,\ p \in \mathbb{N}\ y\ n \geqslant 1,\ 2 \leqslant p \leqslant 4$$

Tabla-σ(n, p)

σ(n, 2)	σ(n, 3)	σ(n, 4)
1	1	1
9	54	324
40	800	16000
125	6250	312500
315	33075	3472875
686	134456	26353376
1344	451584	151732224
2430	1312200	708588000
4125	3403125	2807578125
6655	8052550	9743585500

2 Metodología

La metodología que se empleará en el desarrollo del artículo puede dividirse en dos enfoques: Mecánico, compuesto por el método directo (M.D) y el método de coeficientes (M.C). Analítico, que incluye el análisis de coeficientes (A.C), las identidades NSC (1.3.1) y NCC (3.3.2.1), las funciones especiales (1.4). El enfoque analítico es crucial para identificar las secuencias C(n, k), S(n, k) y N(n, k) al intentar abordar las sumas de potencias superiores a P≥6.

2.1 Método Directo

Por definición, en el método directo cada fase es correcta. Sin embargo, una vez que se determina la secuencia basándose en los patrones observados, este se vuelve heurístico, no equivale a una demostración rigurosa y, por lo tanto, sirve como una aproximación.

2.1.1 Primera Fase

La primera fase se basa en la diferencia entre términos de una secuencia. Para denotar esto, usaremos el símbolo (Δ).

$$\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$$

2.1.2 Segunda Fase

La segunda fase se basa en multiplicar cada término de la secuencia por n, donde n recorre el conjunto de números enteros positivos. Sin embargo, podemos acotar el conjunto a solo los 10 primeros números {1,2,3,…,10}, lo cual es más que suficiente para observar algún patrón en las secuencias.

Generalización

$$S_n \cdot n^p, \quad 1 \leqslant p + p_2 \leqslant p_3$$

Donde:

- p_2 *es la potencia donde se encuentra la secuencia* S_n
- p_3 *es la potencia a calcular*

La generalización nos permitirá trabajar secuencias que se encuentren en p = 5 para intentar calcular P = 7, logrando esto multiplicando cada término por {1,4,9,16,…,100}. De esta manera, estaríamos igualando los exponentes $n^5 \cdot n^2 = n^7$. Con esto, podemos optar por enfoques específicos con solo valores impares o pares de P.

2.1.3 Tercera Fase

La tercera fase se basa en la suma de los primeros n términos de una secuencia. Para denotar, esto usaremos el símbolo (∑).

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$$

2.2 Método de Coeficientes

El Método de Coeficientes (M.C) recicla las secuencias a las que ya se les ha aplicado el Método Directo (M.D), lo que produce solo un aumento en su coeficiente. Sin embargo, debido a la flexibilidad del (M.D), este puede operar con secuencias que se encuentran en valores de P inferiores a donde opera el (M.C). Esto afecta el funcionamiento normal del (M.C), por lo que dichas secuencias se omiten.

Estructura del (M.C):

Incremento en el Coeficiente

$$2 \cdot c \cdot k$$

Donde:

- $k \in \mathbb{N} \;\; y \;\; k \geqslant 1$
- c *es el coeficiente de la secuencia donde se aplico el* $(M.D)$

2.3 Análisis de Coeficientes

La combinación del Método Directo (M.D) con el Método de Coeficientes (M.C) converge en el Análisis de Coeficientes (A.C), que consiste en estudiar la relación entre estos dos métodos con el objetivo de esclarecer secuencias que, a simple vista, no permiten detectar un patrón sencillo. Esto se debe a que dichas secuencias están encadenadas a otras anteriores, lo que hace del (A.C) un abanico de enfoques posibles: M.D–M.C, Simplificación, M.D-M.D (Se detalla en la sección 3.3.10).

2.3.1 M.D-M.C

Este enfoque aparece únicamente en la sección (3.3.3), específicamente para la suma de sextas potencias. Responde a la aparente trivialidad de las fórmulas para valores de P≤5. Algunas de estas fórmulas involucran dos secuencias, por lo que no importa si se inicia desde P = 3, P = 4 o P = 5: el método directo (M.D) siempre retorna la misma secuencia. Por esta razón, el (M.D) se contrasta con el método de coeficientes (M.C), donde el coeficiente de la secuencia S(n+3, 5)

difiere. Ese exceso se suma a la secuencia, dando como resultado $\Sigma C(n+1, 3)^2$. A este proceso se le llama simplificación, en la cual profundizaremos en la siguiente sección.

2.3.2 Simplificación

Este enfoque es el núcleo para el desarrollo del (M.D), para los valores P = 11, 12 y 13. Los coeficientes de la función $\Gamma(n, 9)$ en P = 9 son fundamentales para entender el patrón al que obedecen las simplificaciones 2.0 (3.3.8) y 3.0 (3.3.9).

Los coeficientes de la función $\Gamma(n, 9)$, obtenidos al aplicar el (M.D) a la secuencia $\Sigma S(n+2, 4)^2$ en la sección (3.3.6), están dados por la siguiente fórmula:

$$\beta(n,\ p) = 2^{2p}\cdot(288 + 72\cdot(C(n+1,\ 2) - 1)),\ \textit{donde}\ \ n,\ p \in \mathbb{N}\ \ y\ \ n \geqslant 1$$

Deducción:

La función $\beta(n, p)$ presenta un incremento "caótico" en su coeficiente. Esto se debe a las simplificaciones que rompen el patrón del (M.C). Sin embargo, si se integra con la secuencia $C(n+2, 4)^2$ (agregada en el sección 3.3.6), el (M.D) la trata como una nueva secuencia debido a la función $\Gamma(n, 9)$. En este caso, los coeficientes inician en 72(2) y continúan con 72(3), 72(4), ..., 72(m) para los respectivos valores de P. Por lo tanto, podemos calcular esta suma como $C(m+2, 2) - 1$.

El componente 288 es simplemente $2\cdot144$, que es el coeficiente inicial de la secuencia $\Gamma(n, 9)$.

El último componente, el 2 elevado a una potencia par, se obtiene cuando el (M.D) se aplica a $C(n+2, 4)^2$. Esta operación tiene una divisibilidad por 4, lo que lo convierte en 2^2. Dado que cada nueva secuencia afecta al coeficiente de la siguiente, esta operación se da en cadena, resultando en un exponente de 2p.

Finalmente, dado que se inicia con 288, podemos establecer los valores p = 0 y $(C(m+1, 2) - 1 = 0)$, lo que no afecta el funcionamiento esperado.

La función $\beta(n,\ p)$ se puede reducir factorizando el 4:

$$\beta(n,\ p) = 4^{p+1}\cdot18\cdot(C(n+1,\ 2) + 3),\ \textit{donde}\ \ n,\ p \in \mathbb{N}\ \ y\ \ n \geqslant 1$$

Al usar la función β(n, p), podemos formalizar la simplificación para los valores P = 11 y 12. Esto nos permite prescindir del (M.D). para calcular los coeficientes de las secuencias N(n+2, 4), S(n+3, 5) y N(n+3, 6).

Forma de la Simplificación:

$$\beta(2,\ 1)\cdot(5\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^{m+1}\ +\ S_{1,m})\ =\ \beta(2,\ 1)\cdot S_2$$

Donde:

- $m\ \in\ \mathbb{N}\ \ y\ \ 1\leqslant m\leqslant 2$
- $S_{1,m}$ *es la secuencia que obtenemos al aplicar el* $(M.D)$
- S_2 *es la nueva secuencia resultante de la Simplificación*

Dado que las secuencias S_1, ya se calcularon en las secciones (3.3.6) y (3.3.7), podemos determinar lo siguiente:

$$S_{1,1}\ =\ \sum_{k=1}^{n}\Gamma(k,\ 9)\ \ y\ \ S_{1,2}\ =\ \sum_{k=1}^{n}\Gamma(k,\ 10)\ =\ \sum_{k=1}^{n}(N(k+2,\ 4)\ -\ N(k+1,\ 4))^2.$$

Ejemplo (P = 11):

Calculamos (M.C):

$$72\cdot 3\cdot C(n+2,\ 4)^2\ +\ 24\cdot 4\cdot N(n+2,\ 4)\ +\ C(n+1,\ 2)^2$$

Calculamos β(2, 1):

$$\begin{aligned}\beta(2,\ 1)\ &=\ 2^{2\cdot 1}\cdot(288\ +\ 72\cdot(C(2+2,\ 2)\ -\ 1))\\ &=\ 2^2\cdot(288\ +\ 72\cdot(3\ -\ 1))\\ &=\ 2^2\cdot(288\ +\ 72\cdot 2)\\ &=\ 4\cdot(432)\\ &=\ 1728\end{aligned}$$

Por lo tanto, los coeficientes de C(n+2, 4)² y S(n+3, 5)² son ambos 1728. El coeficiente de N(n+3, 6) puede ser 1728·6 o 1728·30, dependiendo de la identidad NSC (1.3.1). Sin embargo, podemos englobar estas relaciones utilizando la función Γ(n, 9).

Simplificación para m = 1:

$$\beta(2,\ 1)\cdot(5\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^{1+1}\ +\ \sum_{k=1}^{n}\Gamma(k,\ 9))\ =\ \beta(2,\ 1)\cdot S_2$$

Resolvemos para S_2:

$$\begin{aligned} S_2\ &=\ \frac{1728\cdot(5\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^2\ +\ \sum_{k=1}^{n}\Gamma(k,\ 9))}{1728} \\ &=\ 5\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^2\ +\ \sum_{k=1}^{n}\Gamma(k,\ 9) \\ &=\ N(n+2,\ 4)^2 \end{aligned}$$

Dado que β(2, 1) calcula el coeficiente de Γ(n, 9), y como esta secuencia se obtiene al aplicar el (M.D) a C(n+2, 4)², su valor debe anularse con el de la secuencia ΔN(n+3, 6)·k².

Esto se debe a que ΔN(n+3, 6)·k² tiene un coeficiente de 288·30 = 8640. Al dividirlo por 5, se obtiene 1728. La razón de esto es que β(n, p) ya considera la secuencia N(n+3, 6) dentro del (M.D).

Por lo tanto, los coeficientes de N(n+2, 4)², C(n+2, 4)², N(n+2, 4) y C(n+1, 2)² son, respectivamente, 1728, 216, 96 y 1.

Con base en estos valores, la suma de las undécimas potencias es igual a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}k^{11}\ =\ 1728\cdot N(n+2,\ 4)^2\ +\ 216\cdot C(n+2,\ 4)^2\ +\ 96\cdot N(n+2,\ 4) \\ +\ C(n+1,\ 2)^2 \end{aligned}$$

El objetivo final de este enfoque es anular la secuencia N(n+3, 6) en la sección (3.3.6), ya que siempre tendrá un coeficiente de 8640. Esta secuencia no genera ninguna otra, lo cual contrasta con las secuencias del Método de Coeficientes (M.C), que muestran patrones definidos en el incremento de sus coeficientes.

3 Sumas de Potencias

La suma de potencias de los primeros n números naturales ha sido un problema clásico de gran interés para matemáticos especializados en teoría de números. Algunos de los matemáticos que han contribuido significativamente son Johann Faulhaber (1580-1635) y Jacob Bernoulli (1654-1705). Para una discusión más detallada sobre este tema, consulte las referencias [1] y [2].

La suma de las p-ésimas potencias de los primeros n números naturales

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p, \quad donde \quad p \in \mathbb{N}$$

3.1 Casos Triviales de P

Los primeros cuatro valores que toma P corresponden a casos triviales, ya que las secuencias C(n, k), S(n, k) y N(n, k) pueden observarse fácilmente, por lo que no es necesario usar herramientas sofisticadas.

3.1.1 P = 0

$$\sum_{k=1}^{n} k^0 = C(n, 1) \quad \langle propiedad \quad a^0 = 1 \rangle$$

3.1.2 P = 1

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = C(n+1, 2)$$

3.1.3 P = 2

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = S(n+2, 3)$$

3.1.4 P = 3

El Teorema de Nicómaco de Gerasa (60-120 d.C) establece que la suma de los primeros n números cúbicos es igual al enésimo número triangular al cuadrado:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = C(n+1, 2)^2$$

3.2 Secuencias Fundamentales

Las secuencias fundamentales presentan una estructura impar–impar–par–par–…, por lo que C(n, 1), C(n+1, 2), S(n+2, 3) y C(n+1, 2)² son secuencias fundamentales. Estas cuatro secuencias están conectadas mediante el (M.D), aunque solo nos interesarán las dos últimas, ya que forman un ciclo: si aplicamos el (M.D) a S(n+2, 3), obtenemos C(n+1, 2)², y si lo aplicamos a C(n+1, 2)², obtenemos 12·S(n+3, 5) + S(n+2, 3). De esta forma, las secuencias S(n+2, 3) y C(n+1, 2)² no presentan coeficientes mayores que uno, por lo que pueden incorporarse al (M.C) sin necesidad de mantener una lógica interna específica para el método.

3.2.1 Identidad-Nicómaco

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 6 \cdot C(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)$$

Para la suma de cubos, se utilizó la fórmula que expresa las potencias impares mediante coeficientes binomiales. Véase Knuth (1993, p. 283).

3.3 P > 3

3.3.1 P = 4

$$S(n+2,\ 3)\ \langle \textit{Aplicamos el } (M.C) \textit{ en } (3.2.1) \rangle$$

$$\textit{Desarrollo del } (M.D) \textit{ en } C(n+2,\ 4)\ \langle \textit{Usamos la identidad } (3.2.1) \rangle:$$

C(n+1, 3)·(n/2)	Σ(C(k+1, 3)·(k/2))
(0·1)/2 = 0	0
(1·2)/2 = 1	1
(4·3)2 = 6	7
(10·4)/2 = 20	27
(20·5)/2 = 50	77
(35·6)/2 = 105	182
(56·7)/2 = 196	378
(84·8)/2 = 336	714
(120·9)/2 = 540	1254
(165·10)/2 = 825	2079

$$2 \cdot 6 \cdot S(n+3,\ 5)\ \langle \textit{Aplicamos el } (M.D) \textit{ en } C(n+2,\ 4) \rangle$$

$$12 \cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)\ \langle \textit{Agrupamos secuencias} \rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 12 \cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)$$

$\Sigma k^4 = 12 \cdot T_2(n) + T_1(n)$. *Knuth se refiere a* $S(n,\ 2k+1)$ *como* $T_k(n)$, *Véase Knuth* $(1993, p.285)$.

3.3.2 P = 5

$$C(n+1,\ 2)^2 \ \langle Aplicamos\ \ el\ \ (M.C)\ \ en\ \ (3.3.1)\rangle$$

$$Desarrollo\ \ del\ \ (M.D)\ \ en\ \ S(n+3,\ 5):$$

S(n+2, 4)·(n/2)	∑(S(k+2, 4)·(k/2))
(0·1)/2 = 0	0
(1·2)/2 = 1	1
(6·3)/2 = 9	10
(20·4)/2 = 40	50
(50·5)/2 = 125	175
(105·6)/2 = 315	490
(196·7)/2 = 686	1176
(336·8)/2 = 1344	2520
(540·9)/2 = 2430	4950
(825·10)/2 = 4125	9075

$$2\cdot 12\cdot N(n+2,\ 4)\ \langle Aplicamos\ \ el\ \ (M.D)\ \ en\ \ S(n+3,\ 5)\rangle$$

$$24\cdot N(n+2,\ 4)\ +\ C(n+1,\ 2)^2\ \langle Agrupamos\ \ secuencias\rangle$$

$$\sum_{k\ =\ 1}^{n} k^5\ =\ 24\cdot N(n+2,\ 4)\ +\ C(n+1,\ 2)^2$$

3.3.2.1 Identidad NCC

$$N(n+2,\ 4)\ =\ 5\cdot C(n+3,\ 6)\ +\ C(n+2,\ 4)$$

Deducción:

$$\sum_{k=1}^{n} k^5\ =\ 120\cdot C(n+3,\ 6)\ +\ 30\cdot C(n+2,\ 4)\ +\ C(n+1,\ 2)$$

$$=\ 24\cdot(5\cdot C(n+3,\ 6)\ +\ C(n+2,\ 4))\ +\ C(n+1,\ 2)^2$$

Para la suma de quintas potencias, se utilizó la fórmula que expresa las potencias impares mediante coeficientes binomiales. Véase Knuth (1993, p. 283).

Demostración:

$$N(n+2,\ 4) = \frac{C(n+1,\ 3)\cdot C(n+2,\ 3)}{4} \ \langle \textit{Usamos la definicion } 1.3 \rangle$$

Partiendo de la identidad (3.2.1), que relaciona la suma de cubos con el coeficiente binomial C(n+2, 4), podemos despejar la expresión para C(n+1, 3) al revertir la sumatoria:

$$C(n+2,\ 4) = \frac{\sum k^3 - C(n+1,\ 2)}{6}$$

$$C(n+1,\ 3) = \frac{n^3 - n}{6}$$

Expandamos la expresión $(n + 1)^3$:

$$\begin{aligned}(n + 1)^3 &= (n^2 + 2n + 1)(n + 1)\\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1\end{aligned}$$

Restamos ambas expresiones:

$$(n + 1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 2n$$

Reescribamos la expresión C(n+1, 3)·C(n+2, 3)/4 usando la identidad (3.2.1):

$$\begin{aligned}\frac{\frac{(n^3 - n)(n^3 + 3n^2 + 2n)}{36}}{\frac{4}{1}} &= \frac{(n^6 + 3n^5 + 2n^4) - (n^4 + 3n^3 + 2n^2)}{4\cdot 36}\\ &= \frac{n^6 + 3n^5 + n^4 - 3n^3 - 2n^2}{144}\end{aligned}$$

Sustituimos N(n+2, 4) por la expresión polinomial $(n^6 + 3n^5 + n^4 – 3n^3 – 2n^2)/144$ en la Σk^5, expandimos $C(n+1, 2)^2$ y sumamos ambas expresiones:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^5 &= 24\cdot\frac{n^6 + 3n^5 + n^4 - 3n^3 - 2n^2}{24\cdot 6} + \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}\\ &= \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que N(n+2, 4) = 5·C(n+3, 6) + C(n+2, 4), ya que esta identidad es una consecuencia de la demostración de $\Sigma k^5 = 24\cdot N(n+2, 4) + C(n+1, 2)^2$.

3.3.3 P = 6

$$24\cdot S(n+3,\ 5)\ +\ S(n+2,\ 3)\ \langle Aplicamos\ \ el\ \ (M.C)\ \ en\ \ (3.3.2)\rangle$$

$$Desarrollo\ \ del\ \ (M.D)\ \ en\ \ C(n+3,\ 6)\ \ y\ \ C(n+2,\ 4)\ \langle Usamos\ \ la\ \ identidad\ \ NCC\ \ (3.3.2.1)\rangle:$$

C(n+2, 5)·(n/3)	Σ(C(k+2, 5)·(k/3))	C(n+1, 3)·(n/2)	∑(C(k+1, 3)·(k/2))
(0·1)/3 = 0	0	(0·1)/2 = 0	0
(0·2)/3 = 0	0	(1·2)/2 = 1	1
(1·3)/3 = 1	1	(4·3)/2 = 6	7
(6·4)/3 = 8	9	(10·4)/2 = 20	27
(21·5)/3 = 35	44	(20·5)/2 = 50	77
(56·6)/3 = 112	156	(35·6)/2 = 105	182
(126·7)/3 = 294	450	(56·7)/2 = 196	378
(252·8)/3 = 672	1122	(84·8)/2 = 336	714
(462·9)/3 = 1386	2508	(120·9)/2 = 540	1254
(792·10)/3 = 2640	5148	(165·10)/2 = 825	2079

$$24\cdot 2\cdot S(n+3,\ 5)\ \langle Aplicamos\ \ el\ \ (M.D)\ \ en\ \ C(n+2,\ 4)\rangle$$

$$12\cdot S(n+3,\ 5)\ +\ S(n+2,\ 3)\ \langle Aplicamos\ \ el\ \ (M.D)\ \ en\ \ C(n+1,\ 2)^2\rangle$$

$$48\cdot S(n+3,\ 5)\ +\ 12\cdot S(n+3,\ 5)\ +\ S(n+2,\ 3)\ =\ 60\cdot S(n+3,\ 5)\ +\ S(n+2,\ 3)\ \langle Agrupamos\ \ secuencias\rangle$$

$$60\cdot S(n+3,\ 5)\ +\ S(n+2,\ 3)\ -\ \left(24\cdot S(n+3,\ 5)\ +\ S(n+2,\ 3)\right)\ =\ 36\cdot S(n+3,\ 5)\ \langle Aplicamos\ \ el\ \ (A.C)\rangle$$

Por el (A.C), la secuencia 24·5·3·∑(C(k+2, 5)·(k/3)) tiene que contener el inverso aditivo de 36·S(n+3, 5):

$$36\cdot\left(10\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(C(k+2,\ 5)\cdot(k/3)\right)\ +\ S(n+3,\ 5)\right)\ \langle Simplificación\ \ 1.0\rangle$$

$$=\ 36\cdot\sum_{k=1}^{n}C(k+1,\ 3)^2$$

$$36\cdot\sum_{k=1}^{n}C(k+1,\ 3)^2\ +\ 24\cdot S(n+3,\ 5)\ +\ S(n+2,\ 3)\ \langle Agrupamos\ \ secuencias\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^6\ =\ 36\cdot\sum_{k=1}^{n}C(k+1,\ 3)^2\ +\ 24\cdot S(n+3,\ 5)\ +\ S(n+2,\ 3)$$

3.3.4 P = 7

$$48 \cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2 \ \langle Aplicamos\ el\ (M.C)\ en\ (3.3.3) \rangle$$

Desarrollo del $(M.D)$ *en* $\Sigma C(k+1,\ 3)^2$:

C(n+1, 3)²·(n/2)	∑(C(k+1, 3)²·(k/2))
(0·1)/2 = 0	0
(1·2)/2 = 1	1
(16·3)/2 = 24	25
(100·4)/2 = 200	225
(400·5)/2 = 1000	1225
(1225·6)/2 = 3675	4900
(3136·7)/2 = 10976	15876
(7056·8)/2 = 28224	44100
(14400·9)/2 = 64800	108900
(27225·10)/2 = 136125	245025

$$2 \cdot 36 \cdot C(n+2,\ 4)^2 \ \langle Aplicamos\ el\ (M.D)\ en\ \sum C(k+1,\ 3)^2 \rangle$$

$$72 \cdot C(n+2,\ 4)^2 + 48 \cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2 \ \langle Agrupamos\ secuencias \rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = 72 \cdot C(n+2,\ 4)^2 + 48 \cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2$$

3.3.5 P = 8

$$72 \cdot \sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 + 36 \cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3) \ \langle Aplicamos\ el\ (M.C)\ en\ (3.3.4) \rangle$$

Desarrollo del $(M.D)$ *en* $C(n+2,\ 4)^2$:

ΔC(n+2, 4)²·(n/2)	∑(ΔC(k+2, 4)²·(k/2))
(0·1)/2 = 0	0
(1·2)/2 = 1	1
(24·3)/2 = 36	37
(200·4)/2 = 400	437
(1000·5)/2 = 2500	2937
(3675·6)/2 = 11025	13962
(10976·7)/2 = 38416	52378
(28224·8)/2 = 112896	165274
(64800·9)/2 = 291600	456874
(136125·10)/2 = 680625	1137499

$$2\cdot 72\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2 \ \langle \textit{Aplicamos el } (M.D) \textit{ en } C(n+2,\ 4)^2\rangle$$

$$144\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2 + \ 72\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 + 36\cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3) \ \langle \textit{Agrupamos secuencias}\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^8 = 144\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2 + 72\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 + 36\cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)$$

3.3.6 P = 9

$$144\cdot C(n+2,\ 4)^2 + 72\cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2 \ \langle \textit{Aplicamos el } (M.C) \textit{ en } (3.3.5)\rangle$$

$$S(n+2,\ 4)^2 = C(n+1,\ 3)^2 + 20\cdot N(n+2,\ 5) \ \langle \textit{Usamos la identidad NSC } (1.3.1)\rangle$$

Desarrollo del $(M.D)$ *en* $C(n+1,\ 3)^2$ *y* $N(n+2,\ 5)$:

C(n+1, 3)²·(n/2)	Σ(C(k+1, 3)²·(k/2))	N(n+2, 5)·(n/3)	∑(N(k+2, 5)·(k/3))
(0·1)/2 = 0	0	(0·1)/3 = 0	0
(1·2)/2 = 1	1	(0·2)/3 = 0	0
(16·3)/2 = 24	25	(1·3)/3 = 1	1
(100·4)/2 = 200	225	(15·4)/3 = 20	21
(400·5)/2 = 1000	1225	(105·5)/3 = 175	196
(1225·6)/2 = 3675	4900	(490·6)/3 = 980	1176
(3136·7)/2 = 10976	15876	(1764·7)/3 = 4116	5292
(7056·8)/2 = 28224	44100	(5292·8)/3 = 14112	19404
(14400·9)/2 = 64800	108900	(13860·9)/3 = 41580	60984
(27225·10)/2 = 136125	245025	(32670·10)/3 = 108900	169884

$$2\cdot 144\cdot C(n+2,\ 4)^2 + 3\cdot 20\cdot 144\cdot N(n+3,\ 6) \ \langle \textit{Aplicamos el } (M.D) \textit{ en } \Sigma S(k+2,\ 4)^2\rangle$$

$$8640\cdot N(n+3,\ 6) + 432\cdot C(n+2,\ 4)^2 + 72\cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2 \ \langle \textit{Agrupamos secuencias}\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^9 = 8640\cdot N(n+3,\ 6) + 432\cdot C(n+2,\ 4)^2 + 72\cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2$$

3.3.7 P = 10

$$288\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2 + 108\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 + 48\cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)$$

$$\langle \textit{Aplicamos el } (M.C) \textit{ en } (3.3.6)\rangle$$

$$C(n+2,\ 4)^2 + 30\cdot N(n+3,\ 6) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma(k,\ 9)$$

$$\langle \textit{Usamos la funcion } \Gamma(n,\ p)\ (1.4)\rangle$$

Desarrollo del $(M.D)$ *en* $\Sigma\Gamma(k,\ 9)$:

$\Gamma(n, 9)\cdot(n/2)$	$\Sigma(\Gamma(k, 9)\cdot(k/2))$
$(0\cdot1)/2 = 0$	0
$(1\cdot2)/2 = 1$	1
$(54\cdot3)/2 = 81$	82
$(800\cdot4)/2 = 1600$	1682
$(6250\cdot5)/2 = 15625$	17307
$(33075\cdot6)/2 = 99225$	116532
$(134456\cdot7)/2 = 470596$	587128
$(451584\cdot8)/2 = 1806336$	2393464
$(1312200\cdot9)/2 = 5904900$	8298364
$(3403125\cdot10)/2 = 17015625$	25313989

$$2\cdot288\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(N(k+2,\ 4) - N(k+1,\ 4)\right)^2 \ \langle \textit{Aplicamos el } (M.D) \textit{ en } \Sigma\Gamma(k,\ 9)\rangle$$

$$576\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(N(k+2,\ 4) - N(k+1,\ 4)\right)^2 + 288\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2 + 108\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 + 48\cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)\ \langle \textit{Agrupamos secuencias}\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = 576\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(N(k+2,\ 4) - N(k+1,\ 4)\right)^2 + 288\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2 + 108\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 + 48\cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)$$

3.3.8 P = 11

$$216\cdot C(n+2,\ 4)^2 + 96\cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2 \ \langle Aplicamos\ el\ (M.C)\ en\ (3.3.7)\rangle$$

Desarrollo del $(M.D)$ *en* $C(n+2,\ 4)^2$ *y* $N(n+3,\ 6)$:

$\Delta C(n+2,\ 4)^2\cdot(n^2/4)$	$\sum(\Delta C(k+2,\ 4)^2\cdot(k^2/4))$	$\Delta N(n+3,\ 6)\cdot n^2$	$\sum(\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^2)$
$(0\cdot1)/4 = 0$	0	$(0\cdot1) = 0$	0
$(1\cdot4)/4 = 1$	1	$(0\cdot4) = 0$	0
$(24\cdot9)/4 = 54$	55	$(1\cdot9) = 9$	9
$(200\cdot16)/4 = 800$	855	$(20\cdot16) = 320$	329
$(1000\cdot25)/4 = 6250$	7105	$(175\cdot25) = 4375$	4704
$(3675\cdot36)/4 = 33075$	40180	$(980\cdot36) = 35280$	39984
$(10976\cdot49)/4 = 134456$	174636	$(4116\cdot49) = 201684$	241668
$(28224\cdot64)/4 = 451584$	626220	$(14112\cdot64) = 903168$	1144836
$(64800\cdot81)/4 = 1312200$	1938420	$(41580\cdot81) = 3367980$	4512816
$(136125\cdot100)/4 = ...$	5341545	$(108900\cdot100) = ...$	15402816

$$4\cdot432\cdot\sum_{k=1}^{n}\Gamma(k,\ 9) + 8640\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^2\right)$$

$$\langle Aplicamos\ el\ (M.D)\ en\ C(n+2,\ 4)\ y\ N(n+3,\ 6)\rangle$$

$$1728\cdot\left(5\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^2\right) + \sum_{k=1}^{n}\Gamma(k,\ 9)\right) \ \langle Simplificación\ \ 2.0\rangle$$

$$= 1728\cdot N(n+2,\ 4)^2$$

$$1728\cdot N(n+2,\ 4)^2 + 216\cdot C(n+2,\ 4)^2 + 96\cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2 \ \langle Agrupamos\ secuencias\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{11} = 1728\cdot N(n+2,\ 4)^2 + 216\cdot C(n+2,\ 4)^2 + 96\cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2$$

3.3.9 P = 12

$$432\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2 \ +\ 144\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 \ +\ 60\cdot S(n+3,\ 5) \ +\ S(n+2,\ 3)$$

$$\langle \textit{Aplicamos el } (M.C) \textit{ en } (3.3.8)\rangle$$

Desarrollo del $(M.D)$ *en* $\Sigma\left(\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^2\right)$ *y* $\Sigma\Gamma(k,\ 9)$:

$\Delta N(n+3,\ 6)\cdot n^3$	$\sum(\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^3)$	$\Gamma(n,\ 9)\cdot(n/2)$	$\Sigma(\Gamma(k,\ 9)\cdot(k/2))$
$(0\cdot 1) = 0$	0	$(0\cdot 1)/2 = 0$	0
$(0\cdot 8) = 0$	0	$(1\cdot 2)/2 = 1$	1
$(1\cdot 27) = 27$	27	$(54\cdot 3)/2 = 81$	82
$(20\cdot 64) = 1280$	1307	$(800\cdot 4)/2 = 1600$	1682
$(175\cdot 125) = 21875$	23182	$(6250\cdot 5)/2 = 15625$	17307
$(980\cdot 216) = 211680$	234862	$(33075\cdot 6)/2 = 99225$	116532
$(4116\cdot 343) = 1411788$	1646650	$(134456\cdot 7)/2 = 470596$	587128
$(14112\cdot 512) = 7225344$	8871994	$(451584\cdot 8)/2 = 1806336$	2393464
$(41580\cdot 729) = 30311820$	39183814	$(1312200\cdot 9)/2 = 5904900$	8298364
$(108900\cdot 1000) = ...$	148083814	$(3403125\cdot 10)/2 = ...$	25313989

$$1728\cdot 5\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^3\right) \ +\ 2\cdot 1728\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(N(k+2,\ 4) \ -\ N(k+1,\ 4)\right)^2$$

$$\langle \textit{Aplicamos el } (M.D) \textit{ en } \Sigma\left(\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^2\right) \textit{ y } \Sigma\Gamma(k,\ 9)\rangle$$

$$1728\cdot\left(5\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^3\right) \ +\ \sum_{k=1}^{n}\left(N(k+2,\ 4) \ -\ N(k+1,\ 4)\right)^2\right) \ \langle \textit{Simplificación } 3.0\rangle$$

$$= \ 1728\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^3$$

$$1728\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^3 \ +\ 1728\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(N(k+2,\ 4) \ -\ N(k+1,\ 4)\right)^2 \ +\ 432\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2$$
$$+\ 144\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 \ +\ 60\cdot S(n+3,\ 5) \ +\ S(n+2,\ 3) \ \langle \textit{Agrupamos secuencias}\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{12} \ =\ 1728\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^3 \ +\ 1728\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(N(k+2,\ 4) \ -\ N(k+1,\ 4)\right)^2 \ +\ 432\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2$$
$$+\ 144\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 \ +\ 60\cdot S(n+3,\ 5) \ +\ S(n+2,\ 3)$$

3.3.10 P = 13

$$5184\cdot N(n+2,\ 4)^2 - 864\cdot S(n+3,\ 5)^2 - 5184\cdot N(n+3,\ 6) + 288\cdot C(n+2,\ 4)^2 + 120\cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2 \ \langle \textit{Aplicamos el } (M.C) \textit{ en } (3.3.9)\rangle$$

$$N(n+2,\ 4)^2 = \left(5\cdot C(n+3,\ 6) + C(n+2,\ 4)\right)^2$$
$$= 25\cdot C(n+3,\ 6)^2 + 10\cdot C(n+3,\ 6)\cdot C(n+2,\ 4) + C(n+2,\ 4)^2$$
$$\langle \textit{Usamos la identidad NCC } (3.3.2.1)\rangle$$

Desarrollo del $(M.D)$ *en* $C(n+3,\ 6)^2$, $C(n+3,\ 6)\cdot C(n+2,\ 4)$ *y* $C(n+2,\ 4)^2$:

C(n+3, 6)·(C(n+2, 4)/5)	∑(ΔN(k+3, 6)·k²)
(0·0)/5 = 0	0
(0·1)/5 = 0	0
(1·5)/5 = 1	9
(7·15)/5 = 21	329
(28·35)/5 = 196	4704
(84·70)/5 = 1176	39984
(210·126)/5 = 5292	241668
(462·210)/5 = 19404	1144836
(924·330)/5 = 60984	4512816
(1716·495)/5 = 169884	15402816

Dado que se nos vuelve a presentar la secuencia ∑(ΔN(k+3, 6)·k²), podemos reescribirla usando la Simplificación (2.3.2), para m = 1. Por lo tanto, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta N(k+3,\ 6)\cdot k^2\right) = \frac{N(n+2,\ 4)^2 - \left(S(n+3,\ 5)^5 + 6\cdot N(n+3,\ 6)\right)}{5}$$

ΔC(n+2, 4)²·(n²/4)	∑(ΔC(k+2, 4)²·(k²/4))
(0·1)/4 = 0	0
(1·4)/4 = 1	1
(24·9)/4 = 54	55
(200·16)/4 = 800	855
(1000·25)/4 = 6250	7105
(3675·36)/4 = 33075	40180
(10976·49)/4 = 134456	174636
(28224·64)/4 = 451584	626220
(64800·81)/4 = 1312200	1938420
(136125·100)/4 = 3403125	5341545

$\Delta C(n+3,\ 6)^2 \cdot (n/3)$
$(0 \cdot 1)/3 = 0$
$(0 \cdot 2)/3 = 0$
$(1 \cdot 3)/3 = 1$
$(48 \cdot 4)/3 = 64$
$(735 \cdot 5)/3 = 1225$
$(6272 \cdot 6)/3 = 12544$
$(37044 \cdot 7)/3 = 86436$
$(169344 \cdot 8)/3 = 451584$
$(640332 \cdot 9)/3 = 1920996$
$(2090880 \cdot 10)/3 = 6969600$

$$S(n+3,\ 6)^2 = 28 \cdot N(n+3,\ 7) + C(n+2,\ 5)^2 \ \langle \textit{Usamos la identidad NSC } (1.3.1) \rangle$$

Desarrollo del $(M.D)$ *en* $N(n+3,\ 7)$ *y* $C(n+2,\ 5)^2$:

$N(n+3,\ 7) \cdot (n/4)$	$\sum(N(k+3,\ 7) \cdot (k/4))$	$C(n+2,\ 5)^2 \cdot (n/3)$	$\sum(C(k+2,\ 5)^2 \cdot (k/3))$
$(0 \cdot 1)/4 = 0$	0	$(0 \cdot 1)/3 = 0$	0
$(0 \cdot 2)/4 = 0$	0	$(0 \cdot 2)/3 = 0$	0
$(0 \cdot 3)/4 = 0$	0	$(1 \cdot 3)/3 = 1$	1
$(1 \cdot 4)/4 = 1$	1	$(36 \cdot 4)/3 = 48$	49
$(28 \cdot 5)/4 = 35$	36	$(441 \cdot 5)/3 = 735$	784
$(336 \cdot 6)/4 = 504$	540	$(3136 \cdot 6)/3 = 6272$	7056
$(2520 \cdot 7)/4 = 4410$	4950	$(15876 \cdot 7)/3 = 37044$	44100
$(13860 \cdot 8)/4 = 27720$	32670	$(63504 \cdot 8)/3 = 169344$	213444
$(60984 \cdot 9)/4 = 137214$	169884	$(213444 \cdot 9)/3 = 640332$	853776
$(226512 \cdot 10)/4 = 566280$	736164	$(627264 \cdot 10)/3 = 2090880$	2944656

$$1728\left(25 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 4 \cdot N(n+4,\ 8) + 25 \cdot 3 \cdot 3 \cdot C(n+3,\ 6)^2\right)$$
$$+ 1728\left(10 \cdot 5 \cdot \left(\frac{N(n+2,\ 4)^2 - S(n+3,\ 5)^2 - 6 \cdot N(n+3,\ 6)}{5}\right)\right)$$
$$+ 1728\left(4 \cdot \left(S(n+3,\ 5)^2 + 6 \cdot N(n+3,\ 6)\right)\right) \ \langle \textit{Agrupamos secuencias} \rangle$$

$$14515200 \cdot N(n+4,\ 8) + 388800 \cdot C(n+3,\ 6)^2 + 17280 \cdot N(n+2,\ 4)^2 - 10368 \cdot S(n+3,\ 5)^2$$
$$- 62208 \cdot N(n+3,\ 6)$$
$$\langle \textit{Aplicamos el } (M.D) \textit{ en } C(n+3,\ 6)^2,\ C(n+3,\ 6) \cdot C(n+2,\ 4) \textit{ y } C(n+2,\ 4)^2 \rangle$$

Dado que el método (M.D) se aplica a una secuencia presente en (3.3.8), y el método (M.C) se utiliza sobre las secuencias descritas en (3.3.9), se produce un desajuste entre ambos. Por lo tanto, es necesario recurrir al enfoque (M.D–M.D) para garantizar la precisión en los coeficientes de las secuencias $N(n+2,\ 4)^2$, $S(n+3,\ 5)^2$ y $N(n+3,\ 6)$, que es donde se cruzan los métodos (M.D) y (M.C).

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta N(k+2,\ 4)^2\cdot k^2\right)\ -\ \sum_{k=1}^{n}\left(S(k+2,\ 4)^3\cdot k\right)\ \langle \textit{Aplicamos el } (A.C)\rangle$$

$$=\ 3\cdot N(n+2,\ 4)^2\ -\ S(n+3,\ 5)^2\ -\ 6\cdot N(n+3,\ 6)$$

Nótese que la secuencia (0, 2, 245, 6645, ...) tiene una similitud con (0, 0, 45, 1645, …) que se deduce de la Simplificación 2.0. Si restamos ambas secuencias, obtenemos 2·N(n+2, 4)². Por lo tanto, podemos deducir la relación entre los ajustes de P = 11 y P = 12 con respecto a P = 13.

Ahora que conocemos el desajuste, podemos establecer la relación entre ambos valores de P:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta N(k+2,\ 4)^2\cdot k^2\right)\ +\ S(n+3,\ 5)^2\ +\ 6\cdot N(n+3,\ 6)\ -\ 3\cdot N(n+2,\ 4)^2\ =\ \sum_{k=1}^{n}\left(S(k+2,\ 4)^3\cdot k\right)$$
$$\langle \textit{relacion del } (M.D) \textit{ entre } P\ =\ 11\ \textit{ y }\ P\ =\ 12\rangle$$

Multiplicamos por 1728 la expresión S(n+3, 5)² + 6·N(n+3, 6) – 3·N(n+2, 4)², y sumamos el resultado con las secuencias obtenidas del (M.D) en N(n+2, 4)²:

$$14515200\cdot N(n+8,\ 8)\ +\ 388800\cdot C(n+3,\ 6)^2\ +\ 17280\cdot N(n+2,\ 4)^2\ -\ 10368\cdot S(n+3,\ 5)^2$$
$$-\ 62208\cdot N(n+3,\ 6)\ +\ 1728\cdot S(n+3,\ 5)^2\ +\ 10368\cdot N(n+3,\ 6)\ -\ 5184\cdot N(n+2,\ 4)^2$$

$$=\ 14515200\cdot N(n+4,\ 8)\ +\ 388800\cdot C(n+3,\ 6)^2\ +\ 12096\cdot N(n+2,\ 4)^2\ -\ 8640\cdot S(n+3,\ 5)^2$$
$$-\ 51840\cdot N(n+3,\ 6)$$

Agrupamos las secuencias obtenidas del (M.C) con las del (M.D), que ya incluyen el desajuste:

$$14515200\cdot N(n+4,\ 8)\ +\ 388800\cdot C(n+3,\ 6)^2\ +\ 12096\cdot N(n+2,\ 4)^2\ -\ 8640\cdot S(n+3,\ 5)^2$$
$$-\ 51840\cdot N(n+3,\ 6)\ +\ 5184\cdot N(n+2,\ 4)^2\ -\ 864\cdot S(n+3,\ 5)^2\ -\ 5184\cdot N(n+3,\ 6)$$
$$+\ 288\cdot C(n+2,\ 4)^2\ +\ 120\cdot N(n+2,\ 4)\ +\ C(n+1,\ 2)^2\ \langle \textit{Agrupamos secuencias}\rangle$$

$$=\ 14515200\cdot N(n+4,\ 8)\ +\ 388800\cdot C(n+3,\ 6)^2\ +\ 17280\cdot N(n+2,\ 4)^2\ -\ 9504\cdot S(n+3,\ 5)^2$$
$$-\ 57024\cdot N(n+3,\ 6)\ +\ 288\cdot C(n+2,\ 4)^2\ +\ 120\cdot N(n+2,\ 4)\ +\ C(n+1,\ 2)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{13}\ =\ 14515200\cdot N(n+4,\ 8)\ +\ 388800\cdot C(n+3,\ 6)^2\ +\ 17280\cdot N(n+2,\ 4)^2\ -\ 9504\cdot S(n+3,\ 5)^2$$
$$-\ 57024\cdot N(n+2,\ 6)\ +\ 288\cdot C(n+2,\ 4)^2\ +\ 120\cdot N(n+2,\ 4)\ +\ C(n+1,\ 2)^2$$

Usamos la identidad NSC $(1.3.1)$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^{13}\ =\ 2073600\cdot N(n+4,\ 8)\ +\ 388800\cdot S(n+4,\ 7)^2\ +\ 17280\cdot N(n+2,\ 4)^2\ -\ 9216\cdot S(n+3,\ 5)^2$$
$$-\ 63936\cdot N(n+3,\ 6)\ +\ 120\cdot N(n+2,\ 4)\ +\ C(n+1,\ 2)^2$$

3.4 Análisis de Funciones Especiales

Las funciones especiales (1.4) requieren un desarrollo avanzado de las fórmulas para su formulación y comprensión, ya que no son inicialmente intuitivas.

3.4.1 Γ(n, p)

La función Γ(n, p) se basa en un patrón constante que se encuentra en los coeficientes de las secuencias, como resultado de la simplificación mencionada en la sección (2.3.2). Este patrón interviene en los casos de P = 6 y P = 11, lo que garantiza que las secuencias en las fórmulas para los valores de P entre 6 y 10 se mantengan estables.

La función Γ(n, p) se puede reescribir usando C(n+1, 3)²:

$$\Gamma(n,\ p) = C(n+1,\ 3)^2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{p-6},\ \textit{donde}\ \ n,\ p \in \mathbb{N}\ \ y\ \ n \geqslant 1,\ 6 \leqslant p \leqslant 10$$

3.4.2 σ(n, p)

La función σ(n, p), para los valores de p = 2, 3 y 4, está conectada con los valores P = 5, 9 y 13. Esto nos lleva a conjeturar una conexión con las fórmulas para valores impares de P que tienen la forma (4n + 1), donde n≥1.

Deducción:

La secuencia S(n+3, 4) está presente en los valores P = 4, 8 y 12, como se puede observar en la sección (3.5.2). Por lo tanto, podemos aplicar el método directo (M.D) a S(n+3, 4) para los valores 1, 2 y 3 en el exponente de la secuencia, lo que nos conduce a las secuencias clave para los valores P = 5, 9 y 13.

La función σ(n, p) se puede reescribir usando S(n+3, 4):

$$\sigma(n,\ p) = S(n+3,\ 4)^{p-1} \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right),\ \textit{donde}\ \ n,\ p \in \mathbb{N}\ \ y\ \ n \geqslant 1,\ 2 \leqslant p \leqslant 4$$

$$S(n+3,\ 4) \cdot \sigma(n,\ p) = \sigma(n,\ p+1)\ \langle \textit{propiedad}\ \ 1.0 \rangle$$

3.4.2.1 σ(n, 3)

$$\sigma(n,\ 2)\ =\ \Delta N(n{+}3,\ 4)\ =\ 5{\cdot}C(n{+}3,\ 5)\ +\ C(n{+}2,\ 3)$$
$$\langle \textit{Usamos la identidad NCC } (3.3.2.1)\rangle$$

$$\textit{Desarrollo del } (M.D) \textit{ en } C(n{+}3,\ 5)\ +\ C(n{+}2,\ 3):$$

C(n+3, 5)·(S(n+3, 4)/6)	∑(C(k+3, 5)·(S(k, 4)/6))	C(n+2, 3)·S(n+3, 4)	∑(C(k+2, 3)·S(k+3, 4))
(0·1)/6 = 0	0	1·1 = 1	1
(1·6)/6 = 1	1	4·6 = 24	25
(6·20)/6 = 20	21	10·20 = 200	225
(21·50)/6 = 175	196	20·50 = 1000	1225
(56·105)/6 = 980	1176	35·105 = 3675	4900
(126·196)/6 = 4116	5292	56·196 = 10976	15876
(252·336)/6 = 14112	19404	84·336 = 28224	44100
(462·540)/6 = 41580	60984	120·540 = 64800	108900
(792·825)/6 = 108900	169884	165·825 = 136125	245025
(1287·1210)/6 = 259545	429429	220·1210 = 266200	511225

$$5{\cdot}6{\cdot}N(n{+}4,\ 6)\ +\ C(n{+}3,\ 4)^2$$
$$\langle \textit{Aplicamos el } (M.D) \textit{ en } C(n{+}3,\ 5) \textit{ y } C(n{+}2,\ 3), \textit{ usando la propiedad } 1.0\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k,\ 3)\ =\ 30{\cdot}N(n{+}4,\ 6)\ +\ C(n{+}3,\ 4)^2$$

3.4.2.2 σ(n, 4)

La función σ(n, 4) está relacionada con el (M.D) en ∑S(k+3, 4)³, y, por lo tanto, también está vinculada con P = 13.

$$\textit{Desarrollo del } (M.D) \textit{ en } N(n{+}4,\ 6),\ C(n{+}3,\ 4)^2:$$

ΔN(n+4, 6)·(S(n+3, 4)/2)	∑(ΔN(k+4, 6)·(S(k+3, 4)/2))	ΔC(n+3, 4)²·S(n+3, 4)	∑(ΔC(k+3, 4)²·S(k+3, 4))
(0·1)/2 = 0	0	1·1 = 1	1
(1·6)/2= 3	3	24·6 = 144	145
(20·20)/2 = 200	203	200·20 = 4000	4145
(175·50)/2 = 4375	4578	1000·50 = 50000	54145
(980·105)/2 = 51450	56028	3675·105 = 385875	440020
(4116·196)/2 = 403368	459396	10976·196 = 2151296	2591316
(14112·336)/2 = 2370816	2830212	28224·336 = 9483264	9923284
(41580·540)/2 = ...	14056812	64800·540 = 34992000	44915284
(108900·825)/2 = ...	58978062	136125·825 = ...	157218409
(259545·1210)/2 = ...	216002787	266200·1210 = ...	479320409

$$2\cdot\left(30\cdot 6\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\Delta N(k+4,\ 6)\cdot S(k+3,\ 4)}{2}\right)\ +\ \sum_{k=1}^{n}\left(\Delta C(k+3,\ 4)\cdot S(k+3,\ 4)\right)\right)\ =\ \sum_{k=1}^{n} S(k+3,\ 4)^3\cdot(k+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^3\cdot k\ =\ 1200\cdot N(n+4,\ 8)\ +\ 225\cdot S(n+4,\ 7)^2\ +\ 7\cdot N(n+2,\ 4)^2\ -\ 5\cdot S(n+3,\ 5)^2$$
$$-\ 30\cdot N(n+3,\ 6)\ \langle \textit{Consecuencia de}\ (3.3.10)\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k,\ 4)\ =$$

$$\frac{1200\cdot N(n+5,\ 8)\ +\ 225\cdot S(n+5,\ 7)^2\ +\ 7\cdot N(n+3,\ 4)^2\ -\ 5\cdot S(n+4,\ 5)^2\ -\ 30\cdot N(n+4,\ 6)}{2}$$

3.5 Observaciones Generales

Podemos observar patrones en las secuencias para valores impares y pares de P, lo que nos permite ver el problema desde otro ángulo.

3.5.1 Valores Impares de P

$$C(n+1,\ 2)^1,\ C(n+1,\ 2)^2\ \langle P=1\ \ y\ \ P=3\rangle$$

$$C(n+2,\ 4)^1,\ C(n+2,\ 4)^2\ \langle P=3\ \ y\ \ P=7\rangle$$

$$N(n+2,\ 4)^1,\ N(n+2,\ 4)^2\ \langle P=5\ \ y\ \ P=11\rangle$$

3.5.2 Valores Pares de P

$$C(n+1,\ 3)^1,\ \sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2\ \langle P=2\ \ y\ \ P=6\rangle$$

$$S(n+3,\ 5)^1\ =\ \sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^1,\ \sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2,\ \sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^3\ \langle P=4,\ P=8\ \ y\ \ P=12\rangle$$

3.5.3 Valores Impares y Pares de P

$$S(n+3,\ 5)^1,\ S(n+3,\ 5)^2\ \langle P=4\ \ y\ \ P=9\rangle$$

$$C(n+3,\ 6)^1,\ C(n+3,\ 6)^2\ \langle P=6\ \ y\ \ P=13\rangle$$

4 Demostración

Para demostrar las fórmulas desde P = 6 hasta P = 13, se requiere la ayuda de un software matemático, ya que se necesita realizar una compleja manipulación algebraica en la que no puede haber errores, ya que cualquiera de ellos invalidaría la prueba. Para esta tarea, utilizaremos SageMath [8]. La demostración consiste en expandir las secuencias combinatorias y compararlas con las fórmulas expandidas de las sumas de potencias.

4.1 Conclusión

En este articulo se ha demostrado un conjunto de 9 fórmulas, que abarcan los casos desde P = 5 hasta P = 13. Cinco de estas fórmulas fueron introducidas previamente por el autor en la OEIS, como se detalla en las referencias [3], [4], [5], [6] y [7].

Utilizando herramientas matemáticas avanzadas, como SageMath, y mediante una rigurosa manipulación algebraica, se han expandido y comparado las secuencias combinatorias con las fórmulas expandidas de las sumas de potencias. Los resultados obtenidos validan la equivalencia de las expresiones, lo que refuerza la consistencia y exactitud de las fórmulas propuestas.

La metodología propuesta en este artículo explica con éxito la naturaleza del enfoque (expresar las sumas de potencias mediante las secuencias 1.1-1.3), lo que no solo produce las fórmulas deseadas, sino que también revela los patrones a los que estas obedecen.

Código [SageMath]

```
var('n k')

def C(n, k):
 return binomial(n, k)

def S(n, k):
 return C(n-1, k) + C(n, k)

def N(n, k):
 return C(n, k)*C(n, k-1)/n

def V(cs, p): # Validation of the formula
 cs = cs.expand()
 SUM = sum(k^p, k,1,n)
 print(f"sum(k^{p}, k,1,n): \n {SUM}")
 print(f"\nCombinatorial sequences: \n {cs}")

p6 = 36*sum(C(k+1, 3)^2, k,1,n) + 24*S(n+3, 5) + S(n+2, 3)
p7 = 72*C(n+2, 4)^2 + 48*N(n+2, 4) + C(n+1, 2)^2
p8 = 144*sum(S(k+2, 4)^2, k,1,n) + 72*sum(C(k+1, 3)^2, k,1,n) +
36*S(n+3, 5) + S(n+2, 3)
p9 = 8640*N(n+3, 6) + 432*C(n+2, 4)^2 + 72*N(n+2, 4) + C(n+1, 2)^2
p10 = 576*sum((N(k+2, 4) - N(k+1, 4))^2, k,1,n) + 288*sum(S(k+2, 4)^2,
k,1,n) + 108*sum(C(k+1, 3)^2, k,1,n) + 48*S(n+3, 5) + S(n+2, 3)
p11 = 1728*N(n+2, 4)^2 + 216*C(n+2, 4)^2 + 96*N(n+2, 4) + C(n+1, 2)^2
p12 = 1728*sum(S(k+2, 4)^3, k,1,n) + 1728*sum((N(k+2, 4) - N(k+1,
4))^2, k,1,n) + 432*sum(S(k+2, 4)^2, k,1,n) + 144*sum(C(k+1, 3)^2,
k,1,n) + 60*S(n+3, 5) + S(n+2, 3)
p13 = 2073600*N(n+4, 8) + 388800*S(n+4, 7)^2 + 17280*N(n+2, 4)^2 -
63936*N(n+3, 6) - 9216*S(n+3, 5)^2 + 120*N(n+2, 4) + C(n+1, 2)^2

V(p13, 13)
```

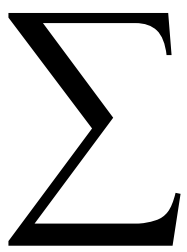
Agradecimientos. Este artículo no podría haber sido escrito sin la ayuda de mi abuela María Esther.

Referencias

[1] Beery, Janet. “Sums of Powers of Positive Integers.” Convergence. MAA. July 2010.
[2] D. E. Knuth, Johann Faulhaber and sums of powers, Math. Compt. 61 (1993), 277–294.
[3] “Sum of 5th powers.” OEIS: Online Encyclopedia of Integer Sequences, May 04, 2024. https://oeis.org/A000539.
[4] “Sum of 6th powers.” OEIS: Online Encyclopedia of Integer Sequences, Apr 16, 2024. https://oeis.org/A000540.
[5] “Sum of 7th powers.” OEIS: Online Encyclopedia of Integer Sequences, Apr 27, 2024. https://oeis.org/A000541.
[6] “Sum of 9th powers.” OEIS: Online Encyclopedia of Integer Sequences, May 11, 2024. https://oeis.org/A007487.
[7] “Sum of 11th powers.” OEIS: Online Encyclopedia of Integer Sequences, May 25, 2024. https://oeis.org/A123095.
[8] The Sage Developers, Sagemath, the Sage Mathematics Software System. SageMath - Open-Source Mathematical Software System.

Palabras clave: teoría de números, combinatoria, coeficientes binomiales, números de narayana, sumas de potencias, faulhaber, bernoulli.

(Relacionado con las secuencias A000027, A000217, A000330, A000537, A000538, A000539, A000540, A00541, A000542, A007487, A023002, A123095, A123094 y A181134.)



SEGUNDO TEXTO

2025

Conjectures on the Sums of Powers of Natural Numbers Via Combinatorial Sequences

Yasser A. Chavez

math.yasserarath@gmail.com

Abstract. We introduce a novel combinatorial framework for expressing the sums of powers of natural numbers, using binomial coefficients, their consecutive sums, and Narayana numbers. New identities and conjectures are presented, verified computationally up to P = 15, revealing unexpected patterns in the coefficients and a surprising connection to the denominators of Bernoulli numbers via the von Staudt-Clausen theorem. This approach offers an elementary yet deep perspective on a classical problem, bridging combinatorial insight with arithmetic computation.

Preliminaries and Notation

1. We denote the binomial coefficient as $C(n,k)$.
2. We denote the sum of two consecutive binomial coefficients as $S(n,\ k) := C(n,\ k) + C(n-1,\ k)$.
3. We denote the Narayana numbers as $N(n,k)$.
4. We denote the highest-order combinatorial term as $\delta_m(n)$, serving as the building block for expressing $\sigma_m(n)$ in our combinatorial framework.

NSC Identity:

$$N(n,\ k) = \frac{S(n,\ k-1)^2 - C(n-1,\ k-2)^2}{4k},\ where\ n,k \in N\ and\ k \geq 2.$$

Proof:

$$= \frac{\left(S(n,\ k-1) + C(n-1,\ k-2)\right)\left(S(n,\ k-1) - C(n-1,\ k-2)\right)}{4k}$$

$$= \frac{(2 \cdot C(n,\ k-1))(2 \cdot C(n-1,\ k-1))}{4k}$$

$$= \frac{4 \cdot C(n,\ k-1) \cdot C(n-1,\ k-1)}{4k}$$

$$= \frac{C(n,\ k-1) \cdot C(n-1,\ k-1)}{k}$$

Using the identity $C(n,\ k) = \frac{n}{k} \cdot C(n-1,\ k-1)$.

Substituting into the standard definition of the Narayana numbers, we have that

$$N(n,\ k) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{k} \cdot C(n-1,\ k-1) \cdot C(n,\ k-1)$$

$$= \frac{C(n-1,\ k-1) \cdot C(n,\ k-1)}{k}.$$

1 Historical Context and Approaches

The problem of summing powers of natural numbers originated in ancient Greece with Pythagoras. However, it wasn't until the 17th century that Johann Faulhaber discovered multiple formulas and generalizations. A few years later, the mathematician Jakob Bernoulli provided a general solution for all powers using the mathematical sequence now known as Bernoulli numbers, named in honor of his contribution.

Since computers did not exist, classical mathematicians could only rely on algebra and the recognition of patterns in formulas. This limitation undoubtedly contributed to the brilliant minds of Faulhaber and Jakob Bernoulli arriving at their remarkable results. Fortunately, we are in the 21st century; we now have computers capable of testing hundreds of thousands of patterns in a single day. In other words, today more than ever, we can “speak” with numbers, while striving to maintain the same profound insight as the classical mathematicians.

The approach proposed in this article can be seen as a bridge between the classical and modern worlds. It incorporates Faulhaber’s method, two distinct perspectives that express power sums using binomial coefficients and their consecutive sums, and finally, a modern contribution: the use of Narayana numbers.

Why wasn’t this approach developed earlier? I have read numerous articles, yet none of them mention this specific method. We can speculate that it was because a more elegant and direct solution—Bernoulli’s—already existed. Consequently, this alternative path may have held little interest for the mathematical community. Perhaps the only ones who would have been interested were the classical mathematicians themselves, but they lacked computers to verify the formulas, a significant obstacle that would have hindered both the development and dissemination of this approach.

So, why is this approach worthwhile? Reducing the problem of power sums to elementary arithmetic has direct implications for mathematical pedagogy, as it paves the way for understanding more advanced approaches, such as those by Bernoulli or Blaise Pascal (using telescoping sums).

Sums of powers of natural numbers

$$\sigma_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p, \quad p \in N.$$

1.1 The first thirteen formulas for $\sigma_p(n)$

Using only our three sequences C(n, k), S(n, k) and N(n, k) we can express the first thirteen sums shown in Figure 1. Note that for $\sigma_3(n)$, the result is equivalent to Nicomachus' Theorem or Faulhaber's approach (Faulhaber polynomials), while in $\sigma_4(n)$, we see the approach presented in [Knuth, page 284].

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(n) &= C(n+1,2)\\
\sigma_2(n) &= S(n+2,3)\\
\sigma_3(n) &= C(n+1,2)^2\\
\sigma_4(n) &= 12\cdot S(n+3,5) + S(n+2,3)\\
\sigma_5(n) &= 24\cdot N(n+2,4) + C(n+1,2)^2\\
\sigma_6(n) &= 36\cdot \sum_{k=1}^{n} C(k+1,3)^2 + 24\cdot S(n+3,5) + S(n+2,3)\\
\sigma_7(n) &= 72\cdot C(n+2,4)^2 + 48\cdot N(n+2,4) + C(n+1,2)^2\\
\sigma_8(n) &= 144\cdot \sum_{k=1}^{n} S(k+2,4)^2 + 72\cdot \sum_{k=1}^{n} C(k+1,3)^2 + 36\cdot S(n+3,5) + S(n+2,3)\\
\sigma_9(n) &= 8640\cdot N(n+3,6) + 432\cdot C(n+2,4)^2 + 72\cdot N(n+2,4) + C(n+1,2)^2\\
\sigma_{10}(n) &= 576\cdot \sum_{k=1}^{n} \left(N(k+2,4) - N(k+1,4)\right)^2 + 288\cdot \sum_{k=1}^{n} S(k+2,4)^2\\
&\quad +108\cdot \sum_{k=1}^{n} C(k+1,3)^2 + 48\cdot S(n+3,5) + S(n+2,3)\\
\sigma_{11}(n) &= 1728\cdot N(n+2,4)^2 + 216\cdot C(n+2,4)^2 + 96\cdot N(n+2,4) + C(n+1,2)^2\\
\sigma_{12}(n) &= 1728\cdot \sum_{k=1}^{n} S(k+2,4)^3 + 1728\cdot \sum_{k=1}^{n} \left(N(k+2,4) - N(k+1,4)\right)^2\\
&\quad +432\cdot \sum_{k=1}^{n} S(k+2,4)^2 + 144\cdot \sum_{k=1}^{n} C(k+1,3)^2 + 60\cdot S(n+3,5) + S(n+2,3)\\
\sigma_{13}(n) &= 2073600\cdot N(n+4,8) + 388800\cdot S(n+4,7)^2 + 17280\cdot N(n+2,4)^2\\
&\quad -63936\cdot N(n+3,6) - 9216\cdot S(n+3,5)^2 + 120\cdot N(n+2,4) + C(n+1,2)^2
\end{aligned}
$$

Figure 1. Formulas.

What is the difference compared to other approaches? Unlike approaches that typically focus only on odd and even values of P, or more general approaches like Bernoulli or Pascal, which have a certain order, in this case two approaches coexist where one influences the other and conversely. A clear example can be seen in $\sigma_{11}(n)$: the first sequence returns two sequences in $\sigma_{12}(n)$, which makes this approach very complex.

2 Conjectures for Even Powers

2.1 P = 4m

The conjecture for powers of the form 4m

$$\delta_{4m}(n) = \sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^m$$

The Conjecture 2.1 holds true for the values of P = 4, 8 and 12. See [1, Sec. 3.3.1, 3.3.5, and 3.3.9]. In these cases, the coefficients 12, 144, and 1728 are respectively powers of 12.

We note that:

$$k^4 = 12 \cdot S(k+2,\ 4) + S(k+1,\ 2)$$

$$k^{4m} = 12^m \cdot S(k+2,\ 4)^m + \ldots + S(k+1,\ 2)^m$$

2.2 P = 4m + 2

The conjecture for powers of the form 4m + 2

$$\delta_{4m+2}(k) = \left(\delta_{2m+1}(k) - \delta_{2m+1}(k-1)\right)^2$$

We observe that the sequences for P = 6 and P = 10 correspond to the squares of the δ sequences for the values of P = 3 and 5. See [1, Sec. 3.3.3 and 3.3.7].

The coefficient of the δ_{4m+2} are the coefficients of the sequences δ_{2m+1} squared, but they don't present an evident pattern like in the case of conjecture 2.1.

Example: $\sigma_6(n) = 36 \cdot \sum \delta_6(k) + 24 \cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)$,

Where $\delta_6(k) = \left(C(k+2,\ 4) - C(k+1,\ 4)\right)^2$.

3 Conjectures for Odd Powers

3.1 P = 4m – 1

The conjecture for powers of the form 4m – 1

$$\delta_{4m-1}(n) = \left(\delta_{2m-1}(n)\right)^2$$

The Conjecture 3.1 holds true for the values of P = 3, 7 and 11. See [1, Sec. 3.5.1].

There are two families that govern the coefficients: the first is related to the $C(n+2, 4)^2$ sequence, and the second is related to the coefficients of the Narayana sequences for powers of the form P = 4m+1.

First Family

$$C_{2^{m+2}-1} = 6^{2^m}\cdot 2^{\left(2^{m+1} - m - 2\right)},\ m \geq 1.$$

Second Family

$$C_{4m-1} = C_N(2m-1)^{2^a}\cdot m,\ m \in \mathbb{N} \setminus \left\{2^{i+2} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Where a ≥ 1 indicates the recursion depth.

3.1.1 Formula for $\sigma_{15}(n)$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{15} = 20736\cdot C(n+2,\ 4)^4 + 17280\cdot N(n+2,\ 4)^2 - 172800\cdot N(n+3,\ 6) - 5400\cdot C(n+2,\ 4)^2 + 144\cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2$$

3.2 P = 4m + 1

NSC Triples

The NSC identity establish a relationship for the 4m+1 powers, there are always two new sequences, either $N(n,k)$ accompanied by $C(n-1,k-2)^2$ or $S(n,k-1)^2$. Therefore, we can intuit three coefficients to maintain the equality, which we will denote as (a, b, c).

$$a\cdot N(n,\ k) + b\cdot S(n,\ k-1)^2 = c\cdot a\cdot N(n,\ k) + b\cdot C(n-1,\ k-2)^2 \qquad (1)$$

There are two families of triples (a,b,c) that satisfy the equality

$$a \cdot N(n,\ k)\ +\ b \cdot S(n,\ k-1)^2\ =\ \frac{P+1}{2} \cdot a \cdot N(n,\ k)\ +\ b \cdot C(n-1,\ k-2)^2.$$

We will denote the first family (a_1, b_1, c_1) and the second family (a_2, b_2, c_2).

3.2.1 P = 8m – 3

The triples for P = 5 and 13 are (8, 1, 3) and (16, 3, 7), respectively. Factoring P = 13 gives us $6^4 \cdot 10^2(16 \cdot N + 3 \cdot S^2)$, and in P = 5 the triple consists of the only factors. See [1, Sec. 3.3.2 and 3.3.10].

The triples exhibit four distinct patterns: $(2^3, 1, 3)$, $(2^4, 3, 7)$, $(8 \cdot 1, 1, 3)$ and $(8 \cdot 2, 3, 7)$. Where 1, 3 can be odd numbers or triangular numbers. Using SageMath, we find that the next triple is $(24, 5, 11)$. This verification is straightforward because it is the only triple that satisfies the equality (1) with c = (P+1)/2.

Let us suppose that (8m, 2m-1, 4m-1) is the correct triple that generates the other triples that satisfies the equality (1) with c = 4m-1.

Verification of the Proposed Triple for the NSC Identity

We substitute the triple $(8m, 2m-1, 4m-1)$ for (a, b, c) in (1):

$$8m \cdot N\ +\ (2m-1) \cdot S^2\ =\ (32m^2-8m) \cdot N\ +\ (2m-1) \cdot C^2$$

$$(2m-1) \cdot (S^2-C^2)\ =(\ 4)^2 m(2m-1) \cdot N$$

$$\frac{(2m-1)(S^2-C^2)}{4^2 m(2m-1)}\ =\ N$$

$$\frac{S^2-C^2}{16m}\ =\ N$$

Therefore, we have verified that the triple $(8m, 2m-1, 4m-1)$ is correct and satisfies equality (1) with $c = 4m-1$, given that the last equality is equivalent to the NSC identity for $k = 4m$, from which it follows that $4k = 16m$.

3.2.2 The two families of Triples for P = 8m-3 and P = 8m+1

P = 8m-3:

$$a_1 = 8m,\ b_1 = 2m-1,\ c_1 = 4m-1.$$

P = 8m+1:

$$a_2 = C(2m+2,\ 2),\ b_2 = C(m+1,\ 2),\ c_2 = 4m+1.$$

Finding the triple (a_2, b_2, c_2) was done the same way as with (a_1, b_1, c_1), discarding patterns and verifying the next triple with SageMath, that is, that the equality (1) is satisfied with $c = 4m+1$.

To verify that $(C(2m+2,2), C(m+1,2), 4m+1)$, we proceed in the same manner as in 3.2.1.

3.2.3 The existence of equality (1)

The Conjecture 2.1 establishes the existence of equality (1) for power sums where P = 4m + 1, which naturally leads to the definition of the generating function

$$\gamma(n,\ p) := S(n+3,\ 4)^p \cdot \frac{n+1}{2},\ where\ n, p \in N.$$

The function $\gamma(n, p)$ for the values of p = 1 and 2 are

$$\sum\gamma(n,\ 1) = N(n+3,4),$$

$$\sum\gamma(n,2) = 6 \cdot N(n+4,\ 6) + S(n+4,\ 5)^2.$$

The function $\sum\gamma(n,3)$ is equal to

$$\frac{1200 \cdot N(n+5,\ 8) + 225 \cdot S(n+5,\ 7)^2 + 7 \cdot (\Sigma\gamma(n,\ 1))^2 - 5 \cdot \Sigma\gamma(n,\ 2)}{2}$$

Note that the coefficients of N(n, 2k) and S(n, 2k-1)^2 in the functions $\gamma(n,2)$ and $\gamma(n,3)$ were divided by powers of 12, given that conjecture 2.1 implies that the following sequence has 12^m as a factor.

The coefficients of the sequences N(n, 2k) and S(n, 2k-1)^2 for the values of P = 9 and 13 are 288, 1728 and 2073600, 388800 respectively.

If we divide the respective coefficients by 12^2 and 12^3, we get the coefficients $12,2$ and $1200,225$.

If we factor both coefficients, we get $2(6+1)$ and $75(16+3)$. We note tha $gcd(12,2)$ and $gcd(1200,225)$ is equal to 2 and $3 \cdot 5^2$, which are the factors obtained by multiplying the previous sequences.

Therefore, we can deduce that $(12/2 = 6/1)$ and $(1200/225 = 16/3)$, from which we can intuit that the coefficients of sequences N(n, 2k) and S(n, 2k-1)² are $12^m \cdot a \cdot f$ and $12^m \cdot b \cdot f$, where f is the factorization of the factors obtained from the previous sequences. Note that this is only for the new sequences.

3.2.4 Complexity of the function $\gamma(n,p)$

We will introduce a property of the function that follows from definition:

$$S(n+3,\ 4)\cdot\gamma(n,\ p) = \gamma(n,\ p+1)\ (Property\ \ 1.0)$$

This property will help us find the solutions that our approach requires.

The recurrence of the function $\gamma(n,p)$ can be understood if we express the sequences in binomial coefficients, basing ourselves on the formulas presented in [Knuth, p. 284].

$$N(n+2,\ 4) = 5\cdot C(n+3,\ 6) + C(n+2,\ 4) \tag{2}$$

$$C(n+2,\ 4)^2 = 70\cdot C(n+4,\ 8) + 20\cdot C(n+3,\ 6) + C(n+2,\ 4) \tag{3}$$

$$N(n+3,\ 6) = 42\cdot C(n+5,\ 10) + 14\cdot C(n+4,\ 8) + C(n+3,\ 6) \tag{4}$$

One can readily deduce that no matter which method we use to tackle the problem of calculating $\gamma(n,p)$, there will always be sequences that prevent us from seeing sequences N(n, 2k) and S(n, 2k-1)², assuming they exist.

Now that we have property 1.0, we have two methods available to calculate $\gamma(n,p)$ plus the identities that link the sequences to the binomial coefficients.

Methods for calculating $\gamma(n,2)$

Method 1: Multiply equation (3) by $S(n+3,4)$.

Method 2: Using the NSC identity, we can replace $S(n+2,4)^2$

with $20 \cdot N(n+2,\ 5) + C(n+1,\ 3)^2$ *then multiply by* $k \in N$.

Method 1 is analogous to Method 2, with the only difference being that Method 1 operates at P = 5 and Method 2 at P = 8. As we have already observed, the first method generates a recurrence relation that complicates the calculation of the sequences N(n, 2k), and $S(n, 2k\text{-}1)^2$, but we see that with Method 2, the solutions are direct, as in the case of P = 13, see [1, p. 22].

The only problem with Method 2 is that the sequences $S(n, 2k)^2$ are within the structure of Conjecture 2.1, which makes them not easy to reach.

From the above, it follows that there are no direct solutions for P > 8 without having to resort to identities.

4 Coefficients

The coefficients of the sequences are a fundamental and complex part of this approach. Therefore, this section will present a more detailed study of the coefficients of all sequences, and we will provide patterns that will allow us to generalize some of them, as in the case of Conjecture 2.1.

4.1 Initial coefficients

We call initial coefficients those coefficients that accompany the first appearance of a sequence.

4.1.1 Trivial coefficients

The sequences for P = 1, 2, and 3 have 1 as their coefficient, since these sequences are fundamental for maintaining parity and specifically the sequences $C(n+1,2)^2$ and $S(n+2,3)$ are used.

The coefficients of the sequences from P = 4 to P = 8 follow a linear growth. This can be deduced from the conjectures and sections (2.1, 3.1, 3.2.3, and 3.2.4). Essentially, the sequence $S(n+2,4)^2$ is an inflection point where complexity increases dramatically.

4.1.2 NSC coefficients

In Section 3.2, we introduce the concept of triples in relation to the NSC identity, which is an essential element for deducing the initial coefficients for the sequences $N(n, 2k)$, $S(n, 2k\text{-}1)^2$, and $C(n\text{-}1, 2k\text{-}2)^2$, drawing upon the results from Sections 3.2.2, 3.2.3 and 3.2.4.

NSC coefficients for $9 < P \leq 37$

Let $C_N(m)$ denote the coefficient of the Narayana numbers in the formula for $\sum k^m$, with q = 1440 . The first eight coefficients $C_N(P)$ are as follows:

$$C_N(37) = q^8 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^3 \cdot 19^2 \cdot \frac{1}{206720},$$

$$C_N(33) = q^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot \frac{1}{2720},$$

$$C_N(29) = q^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot \frac{1}{480},$$

$$C_N(25) = q^5 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot \frac{1}{160},$$

$$C_N(21) = q^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8},$$

$$C_N(17) = q^3 \cdot 7^2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$C_N(13) = q^2 \cdot 7,$$

$$C_N(9) = q \cdot 6.$$

The deduction of the number 1440 as a key constant for the coefficients can be derived from a connection with the self-convolution of Fibonacci numbers, specifically with the sequence ([3, OEIS: A364422] where the numbers (ej: 0, 0, 2, 12, 120, 1200, 14400…) appear, but we will only use the number 1440, since it perfectly captures our structure $1440^2 = 12^3 \cdot 75 \cdot 16$.

Note that the triple $(a \cdot c, b, c)$ is used because we seek to algebraically match the Narayana numbers with the leading terms $\frac{n^{P+1}}{P+1}$ and $\frac{n^P}{2}$ using SageMath see reference [5].

To understand the factorization of prime numbers, we must separately factor the pairs $(C(2n+2,2),4n+1)$ and $(8n,4n-1)$, from which we obtain

$$2n(4n-1)(4n+1):$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ for P} = 9,$$
$$2^2 \cdot 7 \cdot 3^2 \text{ for P} = 17,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 \text{ for P} = 25,$$
$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \text{ for P} = 33.$$

$$2^3 \cdot n(4n-1):$$

$$2^4 \cdot 7 \text{ for P} = 13,$$
$$2^3 \cdot 3 \cdot 11 \text{ for P} = 21,$$
$$2^5 \cdot 5^2 \cdot 3 \text{ for P} = 29,$$
$$2^3 \cdot 5 \cdot 19 \text{ for P} = 37.$$

There are still factors that we have not managed to capture fully. Therefore, we connect this with Section 3.2.3, where the missing factors come from the function $\gamma(n,p)$. Nevertheless, this represents notable progress, since the number 1440 absorbs the most frequent factors.

4.1.3 Narayana Numbers and Bernoulli Denominators

The following theorem is taken from Hardy & Wright, An Introduction to the Theory of Numbers (6th ed., 2008, [4, Theorem 118]):

Theorem (von Staudt-Clausen) *if* $k \geq 1$ *then*

$$(-1)^k B_k \equiv \sum \frac{1}{p} (mod\, 1),$$

The summation being extended over the primes p such that (p-1)|2k.

We will denote the denominators of B_k as D_k. The motivation for relating these two mathematical objects stems from the systematic appearance of prime numbers in $C_N(4m+1), m \geq 2$, which is related to Theorem (von Staudt-Clausen). Therefore, we can conjecture a relationship.

From the Euler–Maclaurin formula, we will use the denominators, which are $D_{2k} \cdot (2k)!$.

Where we can relate the $C_N(m)$ to D_6 up to D_{24} in the following way:

$$C_N(9)\cdot\frac{7}{2} = D_6\cdot 6!,$$

$$C_N(13)\cdot\frac{1}{12} = D_8\cdot 8!,$$

$$C_N(17)\cdot\frac{11}{3360} = D_{10}\cdot 10!,$$

$$C_N(21)\cdot\frac{13}{8640} = D_{12}\cdot 12!$$

$$C_N(25)\cdot\frac{17}{33264} = D_{16}\cdot 16!,$$

$$C_N(33)\cdot\frac{19}{249080832000} = D_{18}\cdot 18!,$$

$$C_N(37)\cdot\frac{23}{105753600} = D_{24}\cdot 24!.$$

We have the denominators 2, 12, 3360, 8640, 33264, 249080832000 and 105753600. But if we factorize them, we can notice that certain familiar constants appear

$$3360 = \frac{D_6\cdot 6!}{9},$$

$$8640 = D_6\cdot 6!\cdot 2\cdot\frac{1}{7},$$

$$33264 = D_6\cdot 6!\cdot 2\cdot 11\cdot\frac{1}{20},$$

$$249080832000 = \frac{D_6\cdot 6!\cdot 6!\cdot 6!}{9}\cdot 11\cdot 13,$$

$$105753600 = D_6\cdot 6!\cdot 6!\cdot 2\cdot 17\cdot\frac{1}{7}.$$

4.1.4 Closed-form formula for C_N(4m+1)

$$C_N(4m+1) = (m+1)\cdot(2m+1)\cdot\left[(2m)!\right]^2,\ m\geq 0.$$

The formula was derived thanks to the sequence ([3, OEIS: A161149] first terms (1, 12, 1440, 604800, ...)), which relates to the coefficients (1, 24, 8640, 14515200, …) in the following way: a(n)·(n+1)!.

4.1.5 Coefficients in odd powers

We will denote the combinations $(30\cdot N(n+3, 6) + C(n+2, 4)^2 = 6\cdot N(n+3, 6) + S(n+3, 5)^2)$ and $(112\cdot N(n+4, 8) + 3\cdot C(n+3, 6)^2 = 16\cdot N(n+4, 8) + 3\cdot S(n+4, 7)^2)$ as NSC(1) and NSC(2).

Recursive formulas for odd powers

$$\frac{\Sigma k^5 - \Sigma k^3}{24} = N(n+2,\ 4)$$

$$\frac{\Sigma k^7 - \Sigma k^5}{24} = 3\cdot C(n+2,\ 4)^2 + N(n+2,\ 4),$$

$$\frac{\Sigma k^9 - \Sigma k^7}{24} = 12\cdot NSC(1) + 3\cdot C(n+2,\ 4)^2 + N(n+2,\ 4),$$

$$\frac{\Sigma k^{11} - \Sigma k^9}{24} = 72\cdot N(n+2,\ 4)^2 - 12\cdot NSC(1) + 3\cdot C(n+2,\ 4)^2 + N(n+2,\ 4),$$

$$\frac{\Sigma k^{13} - \Sigma k^{11}}{24} = 16200\cdot NSC(2) + 648\cdot N(n+2,\ 4)^2 - 396\cdot NSC(1) + 3\cdot C(n+2,\ 4)^2 + N(n+2,\ 4),$$

$$\frac{\Sigma k^{15} - \Sigma k^{13}}{24} = 864\cdot C(n+2,\ 4)^4 - 16200\cdot NSC(2) + 636\cdot NSC(1) + 3\cdot C(n+2,\ 4)^2 + N(n+2,\ 4).$$

In theory, it is possible to obtain the coefficients of P = 2m+1 from the previous ones, but the sequences in NSC(2) introduce multiple sequences, which complicates the task.

5 Conclusions

While our approach reveals deep combinatorial structures, its complexity increases rapidly beyond P = 13. Generalizing to $\sigma_{14}(n)$ remains an open challenge that may require additional theoretical insights or computational advances.

The application of this approach is closely linked to pedagogy because, even though it is the most intricate method for achieving greater precision (since it can be argued that the Bernoulli approach is more complex yet has a clear solution), it is natural in its execution as it is based on arithmetic and pattern recognition. This allows students to be introduced to the problem in a more engaging way before subsequently opting for other approaches.

5.1 Recommended Readings

The following articles and complementary material that I will recommend have helped me to deepen my understanding of the problem and its historical context.

[English]:

1) D. Knuth, Johann Faulhaber and sums of powers, Mathematics of computation, vol. 61, num. 203, 1993, 277–355.
2) Beery, Janet. “Sums of Powers of Positive Integers.” Convergence. MAA. July 2010.

[Spanish]:

1) J. Urias, Sumas de potencias de números naturales, Miscelánea Matemática 72, páginas: 51-65. https://doi.org/10.47234/mm.7203

Acknowledgments. I could not have written this text without the help of my grandmother, María Esther.

References

[1] Chavez, Yasser A. (2025). Sums of Powers of Natural Numbers via Combinatorial Sequences. figshare. Dataset,
https://doi.org/10.6084/m9.figshare.29804282.v14

[2] D. Knuth, Johann Faulhaber and sums of powers, Mathematics of computation, vol. 61, num. 203, 1993, 277–355,
https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1993-1197512-7.

[3] OEIS Foundation Inc. (2025), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Published electronically at https://oeis.org

[4] G.H. Hardy and E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers
(6th ed.), Oxford, Clarendon Press, 2008.

[5] The Sage Developers, Sagemath, the Sage Mathematics Software System. SageMath – Open-Source Mathematical Software System.

Keywords: Power sums, Combinatorial coefficients, Conjectures, Bernoulli numbers.